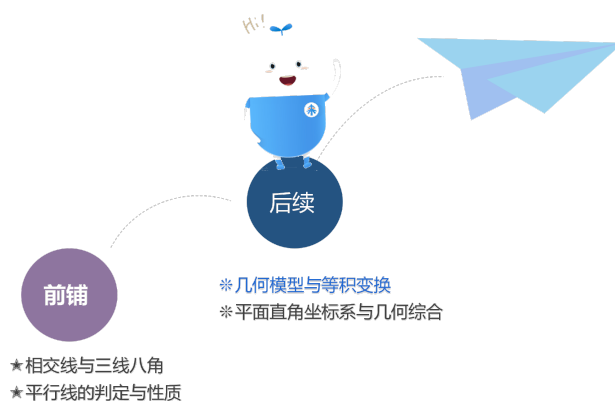
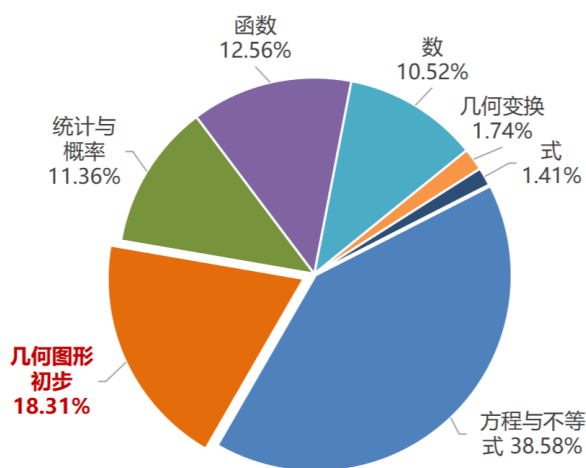


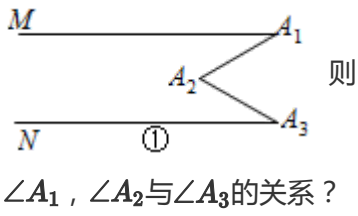
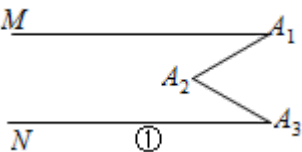
第1讲 相交平行中的几何模型

几何模型与等积变换属于人教版第五章的内容，这部分的难点为几何模型的综合运用；在期中、期末考试中都会进行考察，此外还会与后面学习的平面直角坐标系进行综合，难度还会进一步提升，故这部分我们分为《相交线与平行线初步》、《相交线与平行线》、《几何模型与等积变换》、《平面直角坐标系与几何综合》四个模块。本模块为《几何模型与等积变换》，旨在帮助学生理清四个几何模型以将平行线的性质与判定进行综合运用，为后续模块奠定基础。

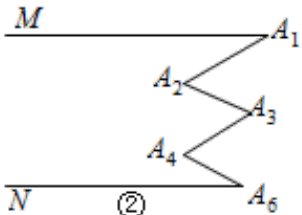
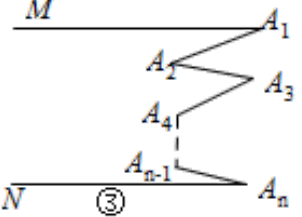
本模块难度偏大，适用于平行线综合的短期突破，本模块分为相交平行中的几何模型、等积变换2讲内容，帮助学生了解平行中的几何模型以及等积变换的常见题型，掌握这部分的解题思路。



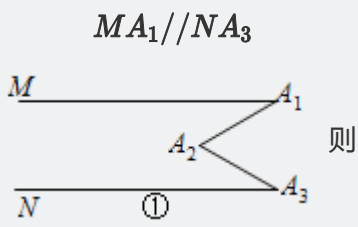
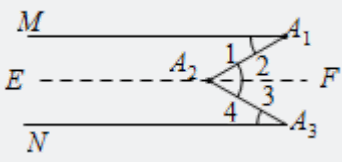
一、内吞角模型

模型	辅助线	证明
$MA_1//NA_3$  则 $\angle A_1, \angle A_2$ 与 $\angle A_3$ 的关系？		证明：过点__作____， $\therefore$ _____， 又 $\because MA_1//NA_3$（已知）， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____， 即_____。

探究：锯齿模型

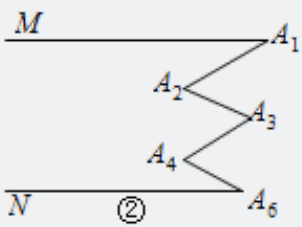
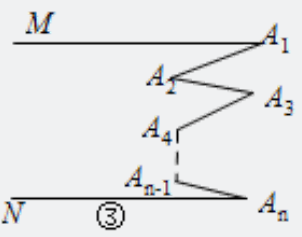
模型	结论
$MA_1//NA_6$ 	
$MA_1//NA_n$ 	

【教法备注】

模型	辅助线	证明
$MA_1//NA_3$  则 $\angle A_1, \angle A_2$ 与 $\angle A_3$ 的关系？		证明：过点 A_2 作 $EF//MA_1$， $\therefore \angle 1 = \angle 2$（两直线平行，内错角相等）。 又 $\because MA_1//NA_3$（已知）， $\therefore EF//MA_3$（平行线公理推论）， $\therefore \angle 3 = \angle 4$（两直线平行，内错角相等）， $\therefore \angle 2 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 4$（等式的性质）， 即 $\angle A_2 = \angle A_1 + \angle A_3$（等量代换）。

注：学生版中辅助线没有体现，需要学生自己画出

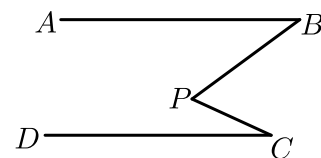
探究：锯齿模型

模型	结论
$MA_1//NA_6$ 	$\angle A_2 + \angle A_4 = \angle A_1 + \angle A_3 + \angle A_5$
$MA_1//NA_n$ 	$\angle A_2 + \angle A_4 + \cdots + \angle A_{n-1} = \angle A_1 + \angle A_3 + \cdots + \angle A_n$

总结：内齿之和等于外齿之和。

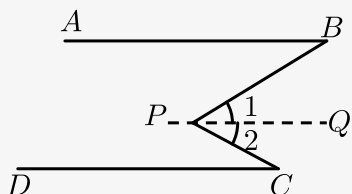
例题1

1. 如图，已知 $AB//CD$ ， $\angle ABP = 34^\circ$ ， $\angle DCP = 27^\circ$ ，那么 $\angle BPC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 61°

【解析】 过点 P 作 $PQ \parallel AB$,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel PQ \parallel CD$,

$\therefore \angle ABP = \angle 1, \angle DCP = \angle 2$,

$\because \angle ABP = 34^\circ, \angle DCP = 27^\circ$,

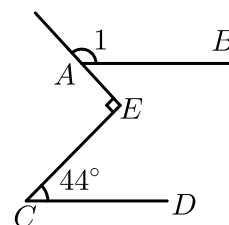
$\therefore \angle BPC = \angle 1 + \angle 2 = 61^\circ$.

故答案为： 61° .

【标注】 【知识点】 平行线构造-拐点模型

练习1

2. 如图，直线 $AB \parallel CD$ ， $\angle C = 44^\circ$ ， $\angle E$ 为直角，则 $\angle 1$ 等于（ ）.



A. 132°

B. 134°

C. 136°

D. 138°

【答案】 B

【解析】 方法一：利用 M 模型，

$\because AB \parallel CD, \angle BAE + 44^\circ = 90^\circ$

$\therefore \angle BAE = 46^\circ$

$\therefore \angle 1 = 134^\circ$

方法二：过E作 $EF \parallel AB$ ，如图所示，

$\because AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel CD \parallel EF$,

$\therefore \angle C = \angle FEC$,

$\angle BAE = \angle FEA$,

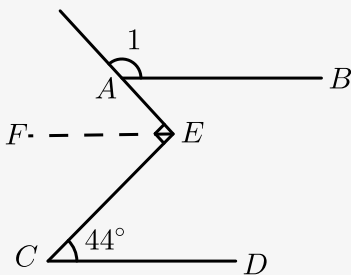
$\because \angle C = 44^\circ$, $\angle AEC$ 为直

角，

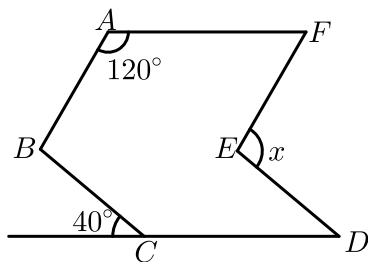
$\therefore \angle FEC = 44^\circ$, $\angle BAE = \angle AEF = 90^\circ - 44^\circ = 46^\circ$,

$\therefore \angle 1 = 180^\circ - \angle BAE = 180^\circ - 46^\circ = 134^\circ$,

故选：B.



3. 如图， $AF \parallel CD$, $AB \parallel EF$, $BC \parallel ED$, 则 $x = \underline{\quad\quad}^\circ$.



【答案】 100

【解析】 $\because AB \parallel EF$

$\therefore \angle AFE = 180^\circ - \angle BAF = 60^\circ$

$\because BC \parallel ED$

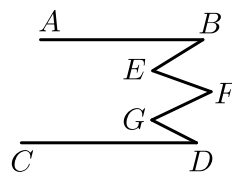
$\therefore \angle EDC = \angle BCF = 40^\circ$

根据猪蹄模型， $\angle FED = \angle AFE + \angle CDE$ ，即 $x = 60^\circ + 40^\circ = 100^\circ$.

【标注】【知识点】几何图形

|| 例题2

4. 如图， $AB \parallel CD$ ，则下列等式成立的是（ ）.



A. $\angle B + \angle F + \angle D = \angle E + \angle G$

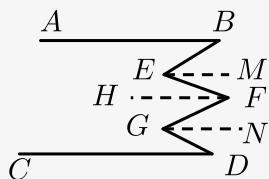
B. $\angle E + \angle F + \angle G = \angle B + \angle D$

C. $\angle F + \angle G + \angle D = \angle B + \angle E$

D. $\angle B + \angle E + \angle F = \angle G + \angle D$

【答案】A

【解析】过E作 $EM \parallel AB$ ，过F作 $FH \parallel AB$ ，过G作 $GN \parallel AB$ ，



$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel EM \parallel GN \parallel CD \parallel FH$,

$\therefore \angle B = \angle BEM$, $\angle FEM = \angle HFE$, $\angle HFG = \angle FGN$, $\angle D = \angle NGD$,

$\therefore \angle B + \angle EFH + \angle HFG + \angle D = \angle BEM + \angle MEF + \angle FGN + \angle NGD$,

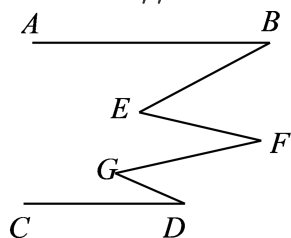
$\therefore \angle B + \angle EFG + \angle D = \angle BEF + \angle FGD$,

故选A.

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

练习2

5. 如图， $AB \parallel CD$ ， $\angle E = \angle G = 30^\circ$ ，则下列判断中正确的是（ ）.



A. $\angle D = \angle F = \angle B$

B. $\angle B + \angle F + \angle D = 60^\circ$

C. $\angle B + \angle F + \angle D = 120^\circ$

D. $GD \parallel EF$

【答案】B

【解析】过E作 $EM \parallel AB$ ，过F作 $FN \parallel AB$ ，过G作 $GQ \parallel AB$ ，

$\therefore AB \parallel CD$,

$\therefore AB \parallel EM \parallel FN \parallel GQ \parallel CD$,

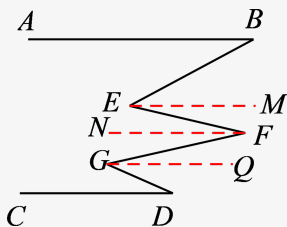
$\therefore \angle B = \angle BEM$, $\angle EFN = \angle MEF$, $\angle NFG = \angle QGF$, $\angle D = \angle DGQ$,

$\therefore \angle B + \angle EFN + \angle NFG + \angle D = \angle BEM + \angle FEM + \angle QGF + \angle DGQ$,

$\therefore \angle B + \angle EFG + \angle D = \angle BEF + \angle FGD$,

$$\therefore \angle BEF = \angle FGD = 30^\circ ,$$

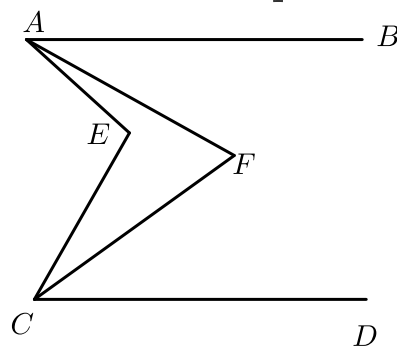
$$\therefore \angle B + \angle EFG + \angle D = 60^\circ .$$



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

例题3

6. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle EAF = \frac{1}{4}\angle EAB$ ， $\angle ECF = \frac{1}{4}\angle ECD$ ，求证： $\angle AFC = \frac{3}{4}\angle AEC$ 。



【答案】证明见解析。

【解析】如图所示，分别过点 E ， F 做 AB 和 CD 的平行线，

$$\text{易得：}\angle AEC = \angle EAB + \angle ECD$$

$$= 4\angle EAF + 4\angle ECF$$

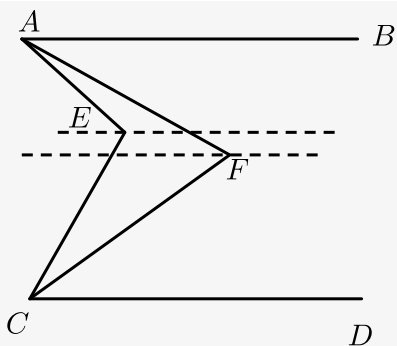
$$= 4(\angle EAF + \angle ECF) ,$$

$$\angle AFC = \angle FAB + \angle FCD$$

$$= 3\angle EAF + 3\angle ECF$$

$$= 3(\angle EAF + \angle ECF) ,$$

$$\text{即有：}\angle AFC = \frac{3}{4}\angle AEC .$$



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

练习3

7. 如图1, 直线 $AB \parallel CD$, 点 P 在两平行线之间, 点 E 在 AB 上, 点 F 在 CD 上, 连接 PE , PF .

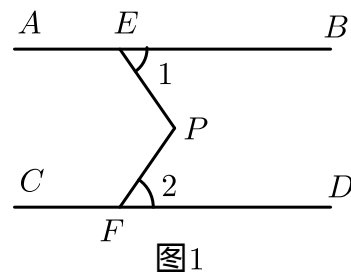


图1

(1) 若 $\angle PEB = 60^\circ$, $\angle PFD = 50^\circ$, 请求出 $\angle EPF$. (请写出必要的步骤说明理由)

(2) 如图2, 若点 P 、 Q 在直线 AB 与 CD 之间时, $\angle 1 = 30^\circ$, $\angle 2 = 40^\circ$, $\angle 3 = 70^\circ$, 则 $\angle 4 =$ _____. (不需说明理由, 请直接写出答案)

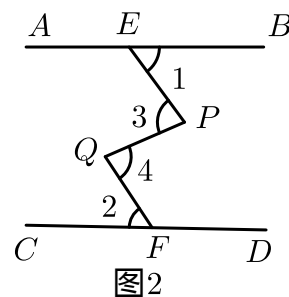


图2

(3) 如图3, 作 P_1E 平分 $\angle PEB$, P_1F 平分 $\angle PFD$, 若设 $\angle PEB = x^\circ$, $\angle PFD = y^\circ$, 则 $\angle EP_1F =$ _____. (用 x 、 y 的代数式表示), 如图4, 若 P_2E 平分 $\angle P_1EB$, P_2F 平分 $\angle P_1FD$, 可得 $\angle EP_2F$; 若 P_3E 平分 $\angle P_2EB$, P_3F 平分 $\angle P_2FD$, 可得 $\angle EP_3F$, 依次类推, 则 $\angle EP_nF =$ _____.

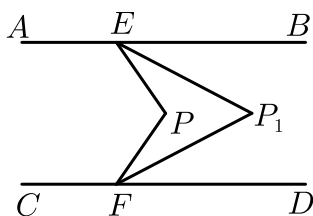


图3

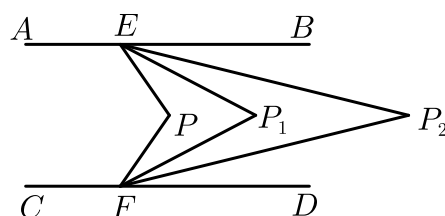


图4

- (4) 在一次综合实践活动课上, 张开同学制作了一个图5的“回旋镖”, 经测量发现 $\angle PAC = 38^\circ$, $\angle PBC = 22^\circ$, 请你找出 $\angle APB$ 与 $\angle C$ 的数量关系并说明理由.

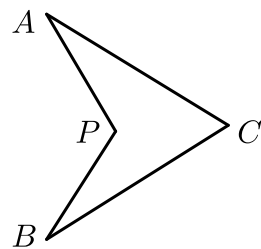


图5

【答案】(1) $\angle EPF = 110^\circ$.

(2) 80°

(3) $\frac{1}{2}(x+y)^\circ; \left(\frac{1}{2}\right)^n(x+y)^\circ$

(4) $\angle APB = \angle C + 60^\circ$. 理由见解析.

【解析】(1) 如图,

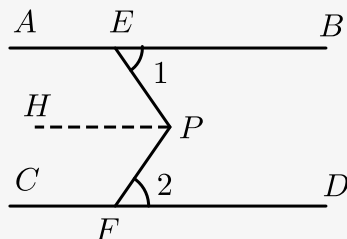


图1

过点P作 $PH \parallel AB$,

$\therefore \angle 1 = \angle EPH, \angle 2 = \angle FPH$,

而 $\angle EPF = \angle EPH + \angle FPH$,

$\therefore \angle EPF = \angle 1 + \angle 2 = 110^\circ$.

(2) $\because \angle 1 + \angle 4 = \angle 2 + \angle 3, \angle 1 = 30^\circ, \angle 2 = 40^\circ, \angle 3 = 70^\circ$,

$\therefore \angle 4 = 80^\circ$,

故答案为 80° .

(3) $\angle EP_1F = \frac{1}{2}(x+y)^\circ$

$\angle EP_nF = \left(\frac{1}{2}\right)^n(x+y)^\circ$.

故答案为 $\frac{1}{2}(x+y)^\circ, \left(\frac{1}{2}\right)^n(x+y)^\circ$.

(4) 过A、B分别作直线AE、BF, 使 $AE \parallel BF$. 如图,

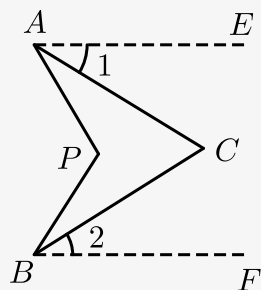


图5

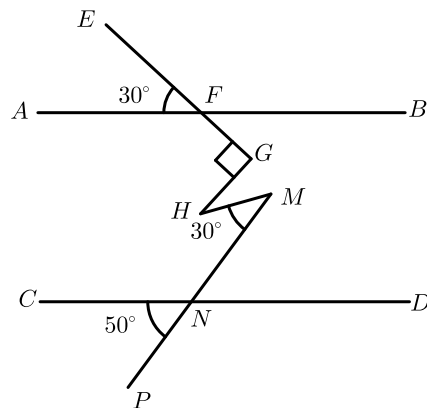
由(I)规律可知 $\angle C = \angle 1 + \angle 2$.

$$\begin{aligned}\angle APB &= \angle PAE + \angle PBF \\ &= (\angle PAC + \angle 1) + (\angle PBC + \angle 2) \\ &= \angle PAC + \angle PBC + (\angle 1 + \angle 2) \\ &= \angle C + 60^\circ.\end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

独步天下

8. 如图所示, 直线 $AB \parallel CD$, $\angle EFA = 30^\circ$, $\angle FGH = 90^\circ$, $\angle HMN = 30^\circ$, $\angle CNP = 50^\circ$, 则 $\angle GHM$ 的大小是 _____.



【答案】 40°

【解析】方法一：如图，延长 PM 、 EG 交于点 K ， PM 延长线交 AB 于点 L 。

$$\because AB \parallel CD,$$

$$\therefore \angle ALM = \angle LND = 50^\circ.$$

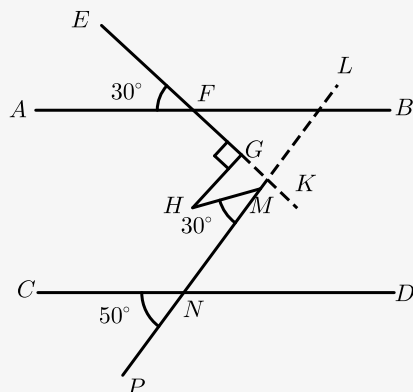
$$\therefore \angle MKG = \angle BFG + \angle ALM = 80^\circ.$$

$$\because \angle HMN = 30^\circ,$$

$$\therefore \angle HMK = 150^\circ.$$

$$\therefore \angle FGH = 90^\circ,$$

$$\begin{aligned}\therefore \angle GHM &= 360^\circ - \angle HMK - \angle MKG - \angle KGH \\ &= 360^\circ - 150^\circ - 80^\circ - 90^\circ = 40^\circ.\end{aligned}$$



方法二：如图，分别过点 G, H 作 AB 的平行线，那么

$$AB // OG // HQ // CD,$$

$$\therefore AB // OG, HQ // CD,$$

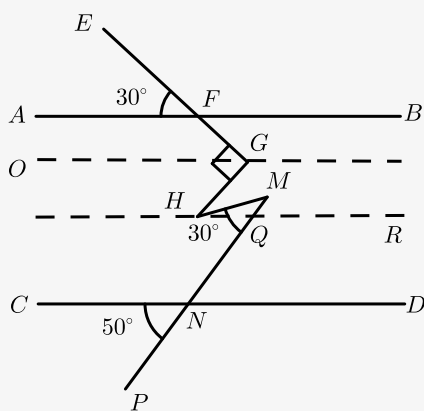
$$\therefore \angle OGE = \angle AFE = 30^\circ, \angle MQR = \angle HQP = \angle CNP = 50^\circ,$$

$$\therefore OG // HQ, \therefore \angle GHQ = \angle OGH = \angle HGE - \angle EGO = 60^\circ,$$

$$\therefore \text{在} \triangle MHQ \text{中}, \angle MHQ + \angle HMQ + \angle MQH = 180^\circ,$$

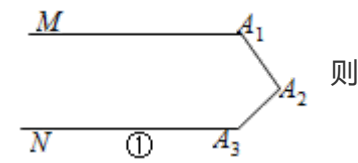
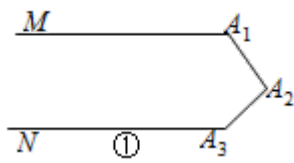
$$\text{又} \therefore \angle MQR + \angle MQH = 180^\circ, \therefore \angle MHQ + \angle HMQ = \angle MQR,$$

$$\therefore \angle MHQ = 50^\circ - 30^\circ = 20^\circ, \therefore \angle GHM = \angle GHQ - \angle MHQ = 40^\circ.$$

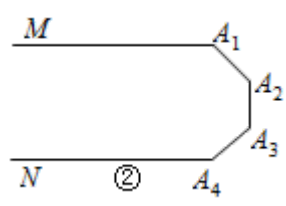
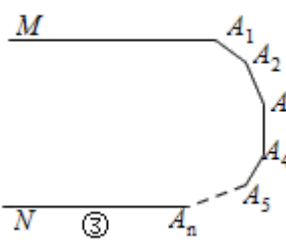


【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

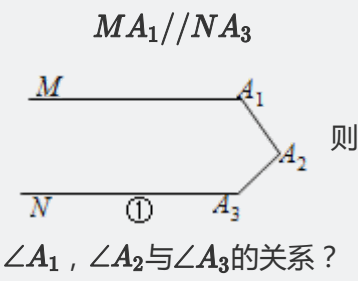
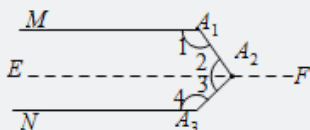
二、外凸角模型

模型	辅助线	证明
$MA_1//NA_3$  则 $\angle A_1, \angle A_2$ 与 $\angle A_3$ 的关系？		证明：过点___作_____, $\therefore$ _____, 又 $\because MA_1//NA_3$ (已知), $\therefore$ _____, $\therefore$ _____, $\therefore$ _____, 即_____.

探究：铅笔模型

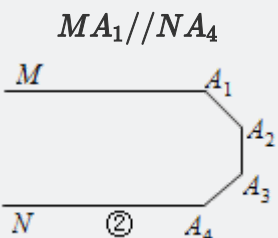
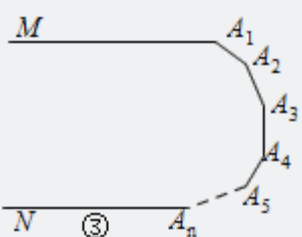
模型	结论
$MA_1//NA_4$ 	
$MA_1//NA_n$ 	

【教法备注】

模型	辅助线	证明
$MA_1//NA_3$  ① 则 $\angle A_1, \angle A_2$ 与 $\angle A_3$ 的关系？		证明：过点 A_2 作 $EF//MA_1$, $\therefore \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ (两直线平行，同旁内角互补) . 又 $\because MA_1//NA_3$ (已知) , $\therefore EF//NA_3$ (平行线公理推论) , $\therefore \angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$ (两直线平行，同旁内角互补) , $\therefore \angle 2 + \angle 3 + \angle 1 + \angle 4 = 360^\circ$ (等式的性质) , 即 $\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = 360^\circ$ (等量代换) .

注：学生版中辅助线没有体现，需要学生自己画出

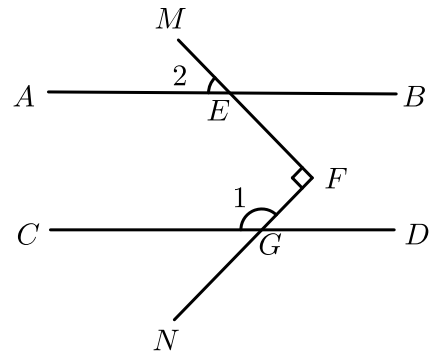
探究：铅笔模型

模型	结论
$MA_1//NA_4$  ②	$\angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 + \angle A_4 = 540^\circ$
$MA_1//NA_n$  ③	$\angle A_1 + \angle A_2 + \dots + \angle A_n = 180^\circ(n - 1)$

总结： $\angle A_1, \angle A_2, \dots$ ，与 $\angle A_n$ 的和等于 A_1A_2, A_2A_3 等线段的条数乘以 180° .

例题4

9. 如图， $AB//CD$ ， $MF \perp NF$ 于 F ， MF 交 AB 于点 E ， NF 交 CD 于点 G ， $\angle 1 = 140^\circ$ ，则 $\angle 2 =$ _____ 度 .



【答案】 50

【解析】 过点F作 $FH \parallel CD$,

$$\therefore \angle 1 = 140^\circ, \angle 1 + \angle 3 = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle 3 = 40^\circ,$$

$$\therefore FH \parallel CD,$$

$$\therefore \angle 4 = \angle 3 = 40^\circ,$$

$$\therefore MF \perp NF,$$

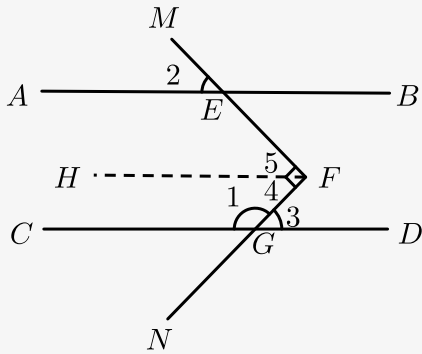
$$\therefore \angle 4 + \angle 5 = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle 5 = 50^\circ,$$

$$\therefore FH \parallel CD, AB \parallel CD,$$

$$\therefore AB \parallel HF,$$

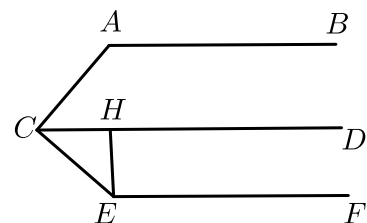
$$\therefore \angle 2 = \angle 5 = 50^\circ.$$



【标注】 【知识点】 平行线构造-拐点模型

练习4

10. 如图, 已知 $AB \parallel CD \parallel EF$, $EH \perp CD$ 于 H , 则 $\angle BAC + \angle ACE + \angle CEH$ 等于 _____ $^\circ$.



【答案】 270

【解析】 $\because AB \parallel CD \parallel EF$,

$$\therefore \angle BAC + \angle ACD = 180^\circ, \angle DCE + \angle CEF = 180^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC + \angle ACE + \angle CEF = 360^\circ;$$

又 $\because EH \perp CD$ 于 H ,

$$\therefore \angle HEF = 90^\circ,$$

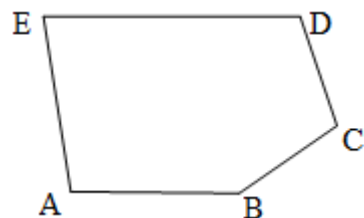
$$\therefore \angle BAC + \angle ACE + \angle CEH$$

$$= \angle BAC + \angle ACE + \angle CEF - \angle HEF$$

$$= 360^\circ - 90^\circ = 270^\circ.$$

【标注】【知识点】角的和差的计算与证明-不需要分类讨论

11. 如图所示, $AB \parallel ED$, $\angle \alpha = \angle A + \angle E$, $\angle \beta = \angle B + \angle C + \angle D$, 则 β 和 α 的数量关系是 () .



A. $2\beta = 3\alpha$

B. $\beta = 2\alpha$

C. $2\beta = 5\alpha$

D. $\beta = 3\alpha$

【答案】 B

【解析】 $\because AB \parallel ED$,

$$\therefore \angle \alpha = \angle A + \angle E = 180^\circ,$$

$$\therefore \text{五边形内角和为 } 180^\circ \times 5 - 2 = 540^\circ,$$

$$\therefore \angle \beta = \angle B + \angle C + \angle D = 540^\circ - \angle A - \angle E = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ,$$

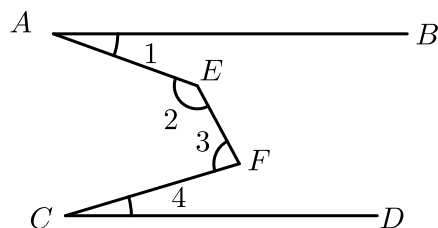
$$\therefore \beta \text{ 和 } \alpha \text{ 的数量关系是 } \beta = 2\alpha.$$

故选 B .

【标注】【知识点】多边形的内角和定理

例题5

12. 如图, $AB \parallel CD$, 用含 $\angle 1$, $\angle 2$, $\angle 3$ 的式子表示 $\angle 4$, 则 $\angle 4$ 的值为 () .



A. $\angle 1 + \angle 2 - \angle 3$

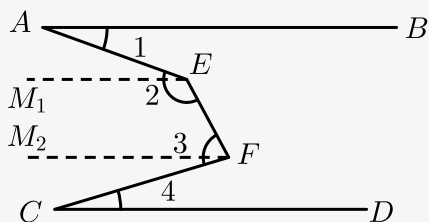
B. $\angle 1 + \angle 3 - \angle 2$

C. $180^\circ + \angle 3 - \angle 1 - \angle 2$

D. $\angle 2 + \angle 3 - \angle 1 - 180^\circ$

【答案】 D

【解析】 过点 E 作 $EM_1 \parallel AB$, 过点 F 作 $FM_2 \parallel AB$,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore EM_1 \parallel FM_2 \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle 1 = \angle AEM_1$, $\angle 4 = \angle M_2FC$, $\angle M_1EF + \angle M_2FE = 180^\circ$.

$\therefore \angle M_1EF = \angle AEF - \angle AEM_1 = \angle 2 - \angle 1$,

$\angle EFM_2 = \angle EFC - \angle M_2FC = \angle 3 - \angle 4$,

$\therefore \angle 2 - \angle 1 + \angle 3 - \angle 4 = 180^\circ$,

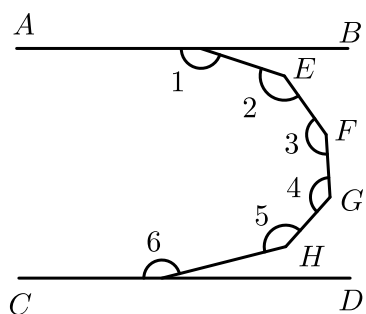
$\therefore \angle 4 = \angle 2 + \angle 3 - \angle 1 - 180^\circ$.

故选 D.

【标注】 【知识点】平行线构造-拐点模型

练习5

13. 如图所示, 两直线 AB 、 CD 平行, 则 $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 =$ () .



A. 630°

B. 720°

C. 800°

D. 900°

【答案】 D

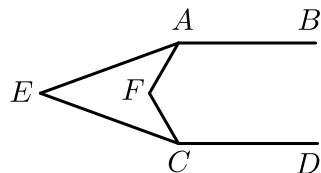
【解析】 分别过 E, F, G, H 点做 AB 的平行线，再求各个角度的和，选 D。

【标注】 【知识点】 平行线的性质

【能力】 运算能力

|| 例题6

14. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， $\angle EAF = \frac{1}{4}\angle EAB$ ， $\angle ECF = \frac{1}{4}\angle ECD$ ，若 $\angle AFC = 120^\circ$ ，求 $\angle AEC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【答案】 40°

【解析】 设 $\angle EAF = \alpha$ ，则 $\angle FAB = 3\alpha$ ，

$\angle ECF = \beta$ ，则 $\angle FCD = 3\beta$ ，

$\therefore \angle AFC + 3\alpha + 3\beta = 360^\circ$ ，

$\therefore \alpha + \beta = 80^\circ$ ，

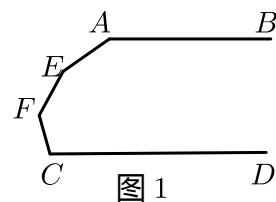
$\angle AEC + 4\alpha + 4\beta = 360^\circ$ ，

$\therefore \angle AEC = 40^\circ$ 。

【标注】 【知识点】 平行线构造-拐点模型

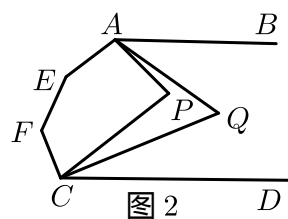
|| 练习6

15. 如图1, 已知 $\angle A + \angle E + \angle F + \angle C = 540^\circ$.



(1) 试判断直线 AB 与 CD 的位置关系, 并说明理由.

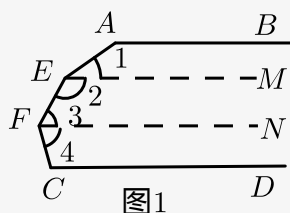
(2) 如图2, $\angle PAB = 3\angle PAQ$, $\angle PCD = 3\angle PCQ$, 试判断 $\angle APC$ 与 $\angle AQC$ 的数量关系, 并说明理由.



【答案】(1) $AB \parallel CD$.

(2) $\angle AQC = \frac{2}{3}\angle APC$.

【解析】(1) 如图1, 分别过点 E 、 F 作 $EM \parallel AB$, $FN \parallel AB$,



$\because EM \parallel AB, FN \parallel AB$,

$\therefore EM \parallel FN \parallel AB$,

$\therefore \angle 1 + \angle A = 180^\circ, \angle 3 + \angle 2 = 180^\circ$,

$\because \angle A + \angle AEF + \angle EFC + \angle C = 540^\circ$,

$\therefore \angle 4 + \angle C = 540^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ$,

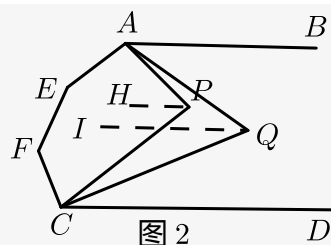
$\therefore FN \parallel CD$,

$\because FN \parallel AB$,

$\therefore AB \parallel CD$.

(2) 方法一: $\angle AQC = \frac{2}{3}\angle APC$, 理由如下:

过点 P 作 $PH \parallel AB$, 过点 Q 作 $QI \parallel AB$,



$$\begin{aligned}
 &\because AB \parallel CD, \\
 &\therefore PH \parallel CD, QI \parallel CD, \\
 &\therefore \angle AQI = \angle QAB, \angle CQI = \angle QCD, \\
 &\angle APH = \angle PAB, \angle PCD = \angle CPH, \\
 &\therefore \angle PAB = 3\angle PAQ, \angle PCD = 3\angle PCQ, \\
 &\therefore \angle QAB = \frac{2}{3}\angle PAB, \angle QCD = \frac{2}{3}\angle PCD, \\
 &\therefore \angle AQC = \angle AQI + \angle IQC = \frac{2}{3}\angle PAB + \frac{2}{3}\angle PCD = \frac{2}{3}(\angle PAB + \angle PCD) \\
 &, \\
 &\therefore \angle APC = \angle APH + \angle CPH, \\
 &\therefore \angle APC = \angle PAB + \angle PCD, \\
 &\therefore \angle AQC = \frac{2}{3}\angle APC.
 \end{aligned}$$

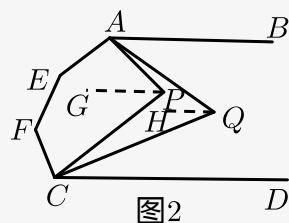
方法二：设 $\angle PAQ = x$, $\angle PCQ = y$,

$$\therefore \angle PAB = 3\angle PAQ, \angle PCD = 3\angle PCQ,$$

$$\therefore \angle PAB = 3x, \angle BAQ = 2x,$$

$$\angle PCD = 3y, \angle QCD = 2y,$$

如图2，过点P作 $PG \parallel AB$ ，过点Q作 $QH \parallel AB$ ，



$$\therefore AB \parallel CD,$$

$$\therefore AB \parallel CD \parallel PG \parallel QH,$$

$$\therefore \angle AQH = \angle BAQ = 2x, \angle QCD = \angle CQH = 2y,$$

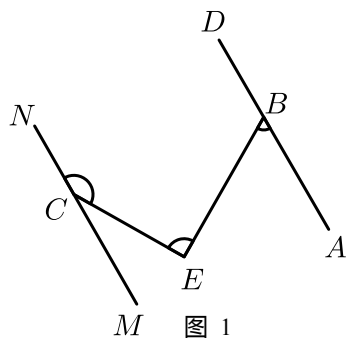
$$\therefore \angle AQC = 2x + 2y = 2(x + y),$$

同理可得： $\angle APC = 3x + 3y = 3(x + y)$,

$$\therefore \frac{\angle AQC}{\angle APC} = \frac{2}{3}, \text{ 即 } \angle AQC = \frac{2}{3}\angle APC.$$

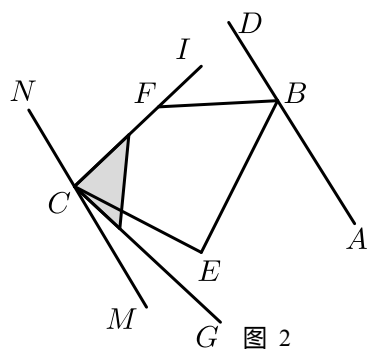
【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

16. 如图1, 点 B , 点 C 分别在线段 AD 、线段 MN 上, 且 $\angle NCE + \angle CEB - \angle ABE = 180^\circ$.

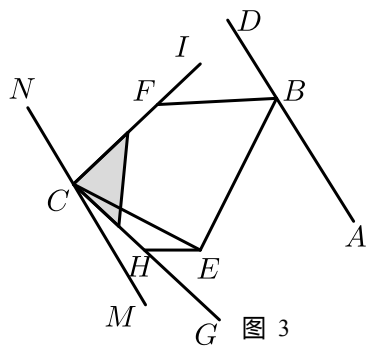


(1) 求证: $AD \parallel MN$.

(2) 如图2, 把一个三角板的直角顶点放在点 C 处, 三角板直角边在射线 CI , CG 上, 其中 CG 平分 $\angle ECM$, BF 平分 $\angle DBE$, 交 CI 于点 F , 当 $\angle CEB = 80^\circ$ 时, 求 $\angle CFB$ 的度数, 写出推导过程.



(3) 在(2)的条件下, 如图3, 过点 E 作 $EH \parallel BF$, 交 CG 于点 H , 当 $\angle CHE = \alpha$, $\angle BFI = \beta$, 请直接写出 α 和 β 的关系式.



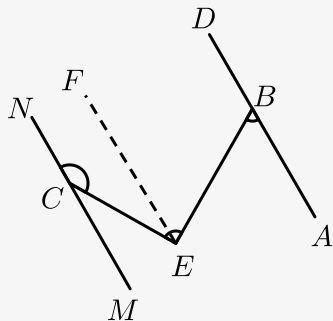
【答案】 (1) 证明见解析.

(2) 140° , 证明见解析.

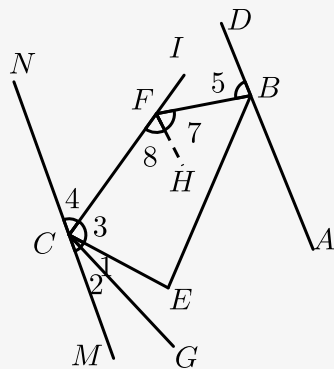
(3) $\alpha - \beta = 90^\circ$.

【解析】 (1) 过点 E 作 $EF \parallel AD$,
 $\therefore \angle ABE = \angle BEF$,

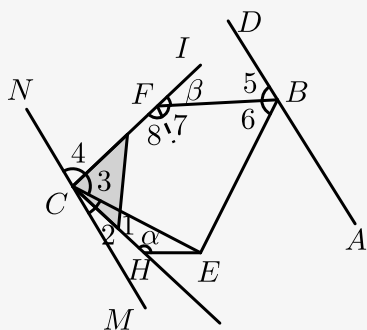
$\therefore \angle NCE + \angle CEB - \angle ABE = 180^\circ$, 即
 $\angle NCE + \angle CEF + \angle FEB - \angle EBA = 180^\circ$,
 $\therefore \angle NCE + \angle CEF = 180^\circ$,
 $\therefore MN \parallel EF$,
 $\therefore AD \parallel MN$.



(2) $\therefore CG$ 平分 $\angle ECM$, 设 $\angle 1 = \angle 2 = x$,
 $\therefore \angle ECM = 2x$,
 $\therefore \angle NCE = 180^\circ - 2x$,
 $\therefore \angle FCG = 90^\circ$,
 $\therefore \angle 3 = \angle FCG - \angle 1 = 90^\circ - x$,
 $\therefore \angle 3 = \frac{1}{2} \angle NCE$,
 $\therefore \angle 3 = \angle 4 = \frac{1}{2} \angle NCE$,
 $\therefore \angle NCE + \angle CEB - \angle ABE = 180^\circ$,
 $\therefore \angle NCE + \angle E - (180^\circ - \angle DBE) = 180^\circ$,
 $\therefore \angle NCE + \angle E + \angle DBE = 360^\circ$,
 $\therefore \angle E = 80^\circ$,
 $\therefore \angle NCE + \angle DBE = 280^\circ$,
 $\therefore BF$ 平分 $\angle DBE$,
 $\therefore \angle 5 = \frac{1}{2} \angle DBE$,
 过点 F 作 $FH \parallel AD$,
 $\therefore \angle 7 = \angle 5$,
 $\therefore AD \parallel MN$, $FH \parallel AD$,
 $\therefore FH \parallel MN$,
 $\therefore \angle 8 = \angle 4$,
 $\therefore \angle CFB = \angle 7 + \angle 8 = \angle 4 + \angle 5 = \frac{1}{2} (\angle DBE + \angle NCE) = 140^\circ$.

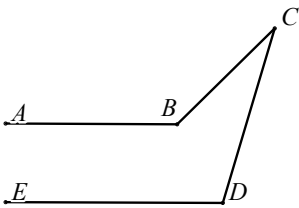
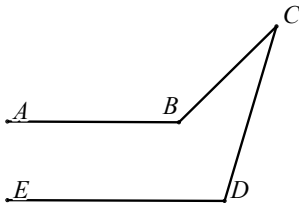


(3) 由(2)得, $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4 = \angle 8$, $\angle 5 = \angle 7 = \angle 6$,
 则 $\beta = 180^\circ - \angle 7 - \angle 8$,
 在四边形 $CEBF$ 中,
 $\angle CEB = 360^\circ - \angle 3 - \angle 6 - \angle 7 - \angle 8 = 360^\circ - 2(\angle 7 + \angle 8)$,
 $\therefore EH \parallel BF$,
 $\therefore \angle 6 + \angle HEB = 180^\circ$, 则 $\angle HEB = 180^\circ - \angle 7$,
 $\therefore \angle HEC = \angle HEB - \angle CEB = \angle 7 + 2\angle 8 - 180^\circ$,
 $\therefore \angle 1 + \angle 3 = 90^\circ$, $\angle 1 + \alpha + \angle HEC = 180^\circ$,
 $\therefore \alpha = 270^\circ - \angle 7 - \angle 8$,
 $\therefore \alpha - \beta = 90^\circ$.

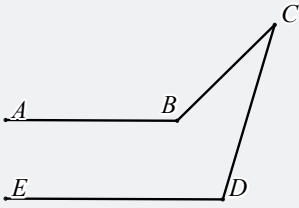
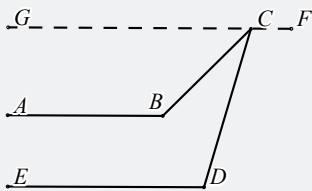


【标注】【知识点】平行线判定与性质的综合

三、前仰角模型

模型	辅助线	证明
$AB//ED$  则$\angle ABC$、$\angle C$、$\angle D$的关系？		证明：过点_____作_____， $\therefore$ _____， 即_____， 又$\because AB//ED$（已知）， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____， 即_____。

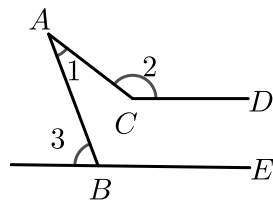
【教法备注】

模型	辅助线	证明
$AB//ED$  则$\angle ABC$、$\angle C$、$\angle D$的关系？		证明：过点C作$GF//AB$， $\therefore \angle ABC + \angle BCG = 180^\circ$ ， 即$\angle BCG = 180^\circ - \angle ABC$ 又$\because AB//ED$（已知）， $\therefore GF//ED$， $\therefore$ $\angle D + \angle BCD + \angle BCG = 180^\circ$ ， $\therefore$ $\angle D + \angle BCD + 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ$ 即$\angle ABC = \angle D + \angle BCD$。

注：学生版中辅助线没有体现，需要学生自己画出。该部分内容也可用三角形内角和推导，但属于八上的知识点，建议老师们用构造辅助线的方法讲解。

例题7

17. 如图， $CD//BE$ ，则 $\angle 2 + \angle 3 - \angle 1$ 的度数等于（ ）。



A. 90°

B. 120°

C. 150°

D. 180°

【答案】 D

【解析】 过A点作 $AK \parallel BE$,

$$\therefore \angle 3 = \angle BAK.$$

$$\because CD \parallel BE, \therefore$$

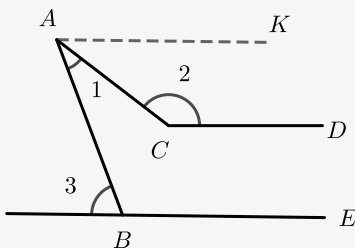
$$AK \parallel CD,$$

$$\therefore$$

$$\angle KAC + \angle 2 = 180^\circ$$

$$\therefore \angle KAC = \angle BAK - \angle 1 = \angle 3 - \angle 1.$$

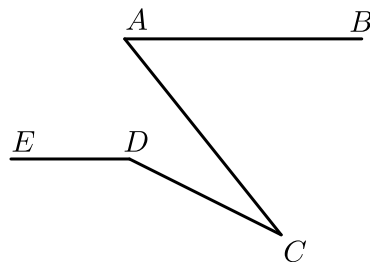
$$\therefore \angle 3 - \angle 1 + \angle 2 = 180^\circ.$$



【标注】 【知识点】 平行线的性质

练习7

18. 如图, 已知 $AB \parallel DE$, $\angle BAC = m^\circ$, $\angle CDE = n^\circ$, 则 $\angle ACD =$ _____.



【答案】 $m^\circ + n^\circ - 180^\circ$

【解析】 延长ED交AC于F,

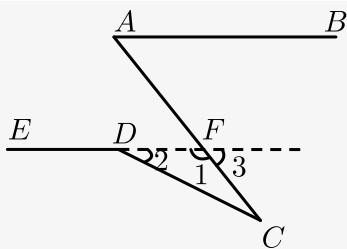
$$\because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle 3 = \angle BAC = m^\circ, \angle 1 = 180^\circ - \angle 3 = 180^\circ - m^\circ,$$

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle CDE = 180^\circ - n^\circ,$$

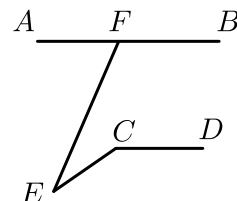
$$\text{故 } \angle C = \angle 3 - \angle 2 = m^\circ - 180^\circ + n^\circ = m^\circ + n^\circ - 180^\circ.$$

$$\text{故答案是: } m^\circ + n^\circ - 180^\circ.$$



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

19. 如图，已知 $AB \parallel CD$ ， EF 交 AB 于 F ，连接 EC 。

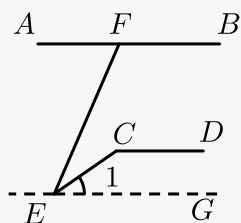


- (1) 若 $\angle AFE = 70^\circ$ ， $\angle DCE = 150^\circ$ ，求 $\angle FEC$ 的度数。
- (2) 若 $\angle AFE = \alpha$ ， $\angle DCE = \beta$ ，试用等式表示 $\angle FEC$ 与 α 、 β 之间的数量关系，并说明理由。

【答案】(1) $\angle FEC = 40^\circ$ 。

(2) $\angle FEC = \alpha + \beta - 180^\circ$ ，证明见解析。

【解析】(1) 过点 E 作 $EG \parallel CD$ ，



$$\therefore \angle 1 + \angle DCE = 180^\circ,$$

$$\because \angle DCE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 = 30^\circ,$$

$$\because AB \parallel CD,$$

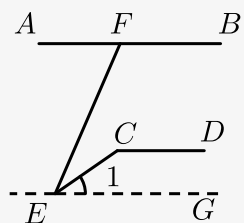
$$\therefore EG \parallel AB,$$

$$\therefore \angle FEG = \angle AFE = 70^\circ,$$

$$\therefore \angle FEC = \angle FEG - \angle 1 = 70^\circ - 30^\circ = 40^\circ.$$

(2) $\angle FEC = \alpha + \beta - 180^\circ$ ，理由如下：

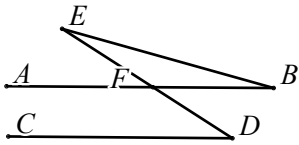
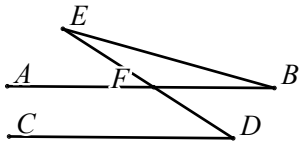
过点 E 作 $EG \parallel CD$ ，



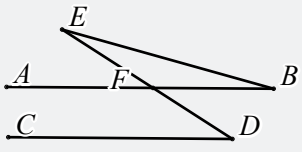
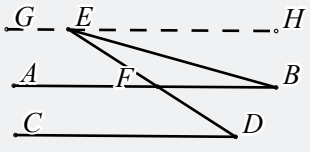
$$\begin{aligned}
 &\because CD \parallel EG, \\
 &\therefore \angle DCE + \angle 1 = 180^\circ, \\
 &\because \angle DCE = \beta, \\
 &\therefore \angle 1 = 180^\circ - \beta, \\
 &\because AB \parallel EG, \\
 &\therefore \angle FEG = \angle AFE = \alpha, \\
 &\therefore \angle FEC = \angle FEG - \angle 1 \\
 &\quad = \alpha - (180^\circ - \beta) \\
 &\quad = \alpha + \beta - 180^\circ.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

四、后翻角模型

模型	辅助线	证明
$AB \parallel CD$  则$\angle E$、$\angle B$、$\angle D$的关系？		证明：过点____作_____， $\therefore$ _____， 又$\because AB \parallel ED$（已知）， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____， $\therefore$ _____， 即_____。

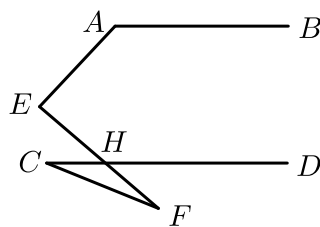
【教法备注】

模型	辅助线	证明
$AB//CD$  则$\angle E$、$\angle B$、$\angle D$的关系？		证明：过点E作$GH//AB$， $\therefore \angle BEH = \angle B$， 又$\because AB//CD$（已知）， $\therefore GH//CD$， $\therefore \angle D = \angle DEH$， $\therefore \angle D = \angle FEB + \angle BEH$ 即$\angle D = \angle FEB + \angle B$.

注：学生版中辅助线没有体现，需要学生自己画出。该部分内容也可用三角形内角和推导，但属于八上的知识点，建议老师们用构造辅助线的方法讲解。

例题8

20. 如图， $AB//CD$ ，则 $\angle A$ 、 $\angle C$ 、 $\angle E$ 、 $\angle F$ 满足的数量关系是（ ）。

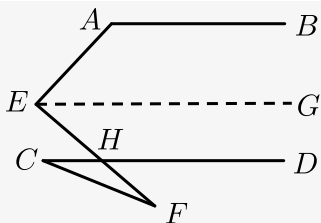


- A. $\angle A = \angle C + \angle E + \angle F$
 C. $\angle A - \angle E + \angle C + \angle F = 90^\circ$

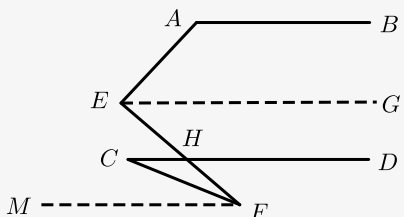
- B. $\angle A + \angle E - \angle C - \angle F = 180^\circ$
 D. $\angle A + \angle E + \angle C + \angle F = 360^\circ$

【答案】 B

【解析】 方法一：如图，过 E 作 $EG//AB$ ，
 $\because AB//CD$ ，
 $\therefore AB//CD//EG$ ，
 $\therefore \angle GEF = \angle DHF = \angle C + \angle F$ ，
 $\angle A + \angle AEG = 180^\circ$ ，
 $\therefore \angle A + \angle AEF - \angle GEF = 180^\circ$ ，
 即 $\angle A + \angle AEF - \angle C - \angle F = 180^\circ$ 。



方法二：如图，过 E 作 $EG \parallel AB$ ，过 F 作 $FM \parallel AB$ ，



$\therefore AB \parallel CD$ ，

$\therefore AB \parallel CD \parallel EG \parallel MF$ ，

$\therefore \angle A + \angle AEG = 180^\circ$ ， $\angle GEF = \angle MFE$ ， $\angle C = \angle CFM$ ，

$\therefore \angle AEG = \angle AEF - \angle GEF = \angle AEF - \angle MFE$

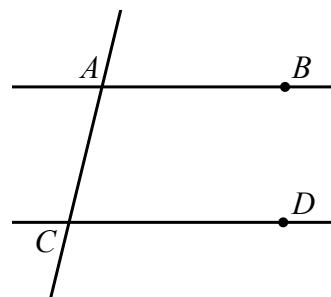
$= \angle AEF - \angle EFC - \angle C$ ，

即 $\angle A + \angle AEF - \angle EFC - \angle C = 180^\circ$ 。

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

练习8

21. 如图，已知直线 AB 、 CD 被直线 AC 所截， $AB \parallel CD$ ， E 是平面内任意一点（点 E 不在直线 AB 、 CD 、 AC 上），设 $\angle BAE = \alpha$ ， $\angle DCE = \beta$ 。下列各式：① $\alpha + \beta$ ，② $\alpha - \beta$ ，③ $\beta - \alpha$ ，④ $360^\circ - \alpha - \beta$ ， $\angle AEC$ 的度数可能是（ ）。



A. ①②③

B. ①②④

C. ①③④

D. ①②③④

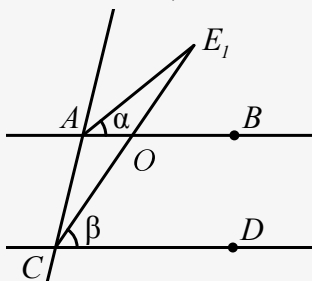
【答案】 D

【解析】 方法一： E 有4种可能位置。

(1) “类鸡翅模型” $\angle AOC = \angle DCE_1 = \beta$ ，

$\therefore \angle AOC = \angle BAE_1 + \angle AE_1C$ ，

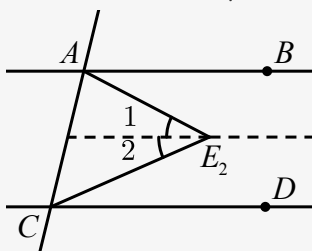
$$\therefore \angle AE_1C = \beta - \alpha .$$



(2) “猪蹄模型” 过 E_2 作 AB 平行线，则

$$\angle 1 = \angle BAE_2 = \alpha , \angle 2 = \angle DCE_2 = \beta ,$$

$$\therefore \angle AE_2C = \alpha + \beta .$$

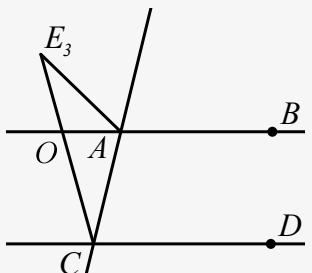


(3) “鸡翅模型” $\angle BOE_3 = \angle DCE_3 = \beta ,$

$$\therefore \angle BOE_3 = \angle DCE_3 = \beta ,$$

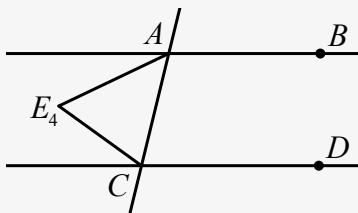
$$\therefore \angle BAE_3 = \angle BOE_3 + \angle AE_3C ,$$

$$\therefore \angle AE_3C = \alpha - \beta .$$



(4) “铅笔头模型” $\angle BAE_4 + \angle AE_4C + \angle DCE_4 = 360^\circ ,$

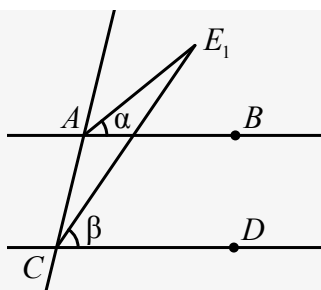
$$\therefore \angle AE_4C = 360^\circ - \alpha - \beta .$$



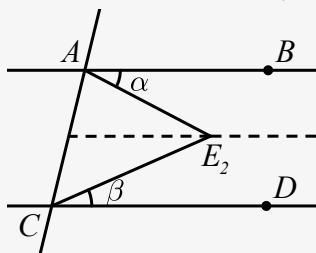
$$\therefore \angle AEC \text{ 的度数可能为 } \beta - \alpha , \alpha - \beta , \alpha + \beta , 360^\circ - \alpha - \beta ,$$

选D .

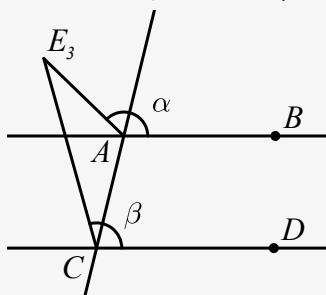
方法二：(1) $\angle AE_1C = \beta - \alpha .$



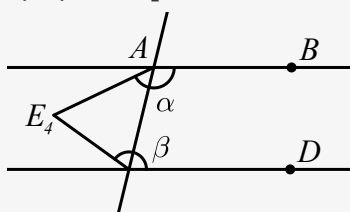
(2) $\angle AE_1C = \alpha + \beta$.



(3) $\angle AE_2C = \alpha - \beta$.



(4) $\angle AE_3C = 360^\circ - \alpha - \beta$.



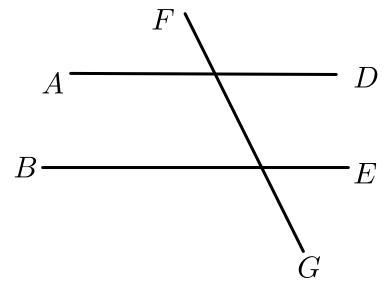
$\therefore \angle AEC$ 的度数可能为 $\beta - \alpha$, $\alpha - \beta$, $\alpha + \beta$, $360^\circ - \alpha - \beta$.

故选D.

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

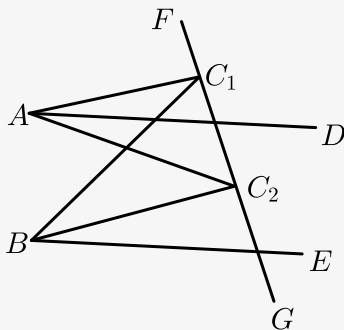
例题9

22. 已知 $AD \parallel BE$, 点 C 是直线 FG 上的动点, 若在点 C 的移动过程中, 存在某时刻使得 $\angle ACB = 45^\circ$, $\angle DAC = 22^\circ$, 则 $\angle EBC$ 的度数为 _____.



【答案】 67° 或 23°

【解析】 当 C 在图中 C_1 位置时，



$\because AD \parallel BE$,

$\therefore \angle EBC = \angle ACB + \angle DAC = 67^\circ$,

当 C 在图中 C_2 位置时，

$\because AD \parallel BE$,

$\therefore \angle EBC = \angle ACB - \angle DAC = 23^\circ$.

故答案为： 67° 或 23° .

【标注】 【知识点】 角的和差的计算与证明-需要分类讨论

23. 已知，直线 $AB \parallel DC$ ，点 P 为平面上一点，连接 AP 与 CP .

(1) 如图1，点 P 在直线 AB 、 CD 之间，当 $\angle BAP = 60^\circ$ ， $\angle DCP = 20^\circ$ 时，求 $\angle APC$.

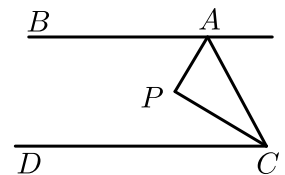


图 1

(2) 如图2，点 P 在直线 AB 、 CD 之间， $\angle BAP$ 与 $\angle DCP$ 的平分线相交于点 K ，写出 $\angle AKC$ 与 $\angle APC$ 之间的数量关系，并说明理由.

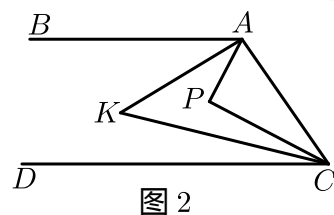


图 2

- (3) 如图3, 点P在CD外, $\angle BAP$ 与 $\angle DCP$ 的平分线相交于点K, $\angle AKC$ 与 $\angle APC$ 有何数量关系? 并说明理由.

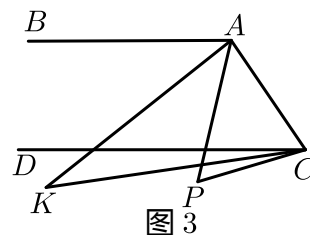


图 3

【答案】(1) 80° .

(2) $\angle AKC = \frac{1}{2} \angle APC$, 证明见解析.

(3) $\angle AKC = \frac{1}{2} \angle APC$, 证明见解析.

【解析】(1) 如图1, 过P作 $PE \parallel AB$,

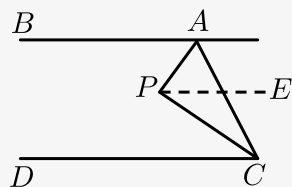


图 1

$\because AB \parallel DC$,
 $\therefore PE \parallel AB \parallel CD$,
 $\therefore \angle APE = \angle BAP$, $\angle CPE = \angle DCP$,
 $\therefore \angle APC = \angle APE + \angle CPE$
 $= \angle BAP + \angle DCP$
 $= 60^\circ + 20^\circ = 80^\circ$.

(2) 如图2, 过K作 $KE \parallel AB$,

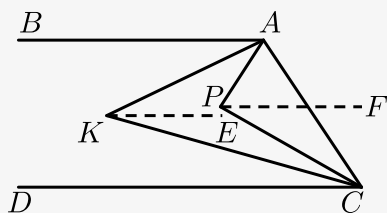


图 2

$\because AB \parallel CD$,
 $\therefore KE \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle AKE = \angle BAK, \angle CKE = \angle DCK,$
 $\therefore \angle AKC = \angle AKE + \angle CKE = \angle BAK + \angle DCK,$
 过P作 $PF \parallel AB$,
 同理可得, $\angle APC = \angle BAP + \angle DCP,$
 $\therefore \angle BAP$ 与 $\angle DCP$ 的平分线相交于点K,
 $\therefore \angle AKC = \angle BAK + \angle DCK = \frac{1}{2}\angle BAP + \frac{1}{2}\angle DCP$
 $= \frac{1}{2}(\angle BAP + \angle DCP) = \frac{1}{2}\angle APC,$
 $\therefore \angle AKC = \frac{1}{2}\angle APC.$

(3) 如图3, 过K作 $KE \parallel AB$,

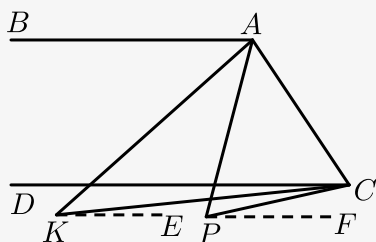


图 3

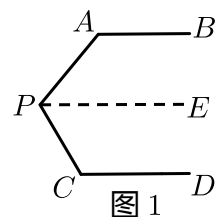
$\therefore AB \parallel CD,$
 $\therefore KE \parallel AB \parallel CD,$
 $\therefore \angle BAK = \angle AKE, \angle DCK = \angle CKE,$
 $\therefore \angle AKC = \angle AKE - \angle CKE = \angle BAK - \angle DCK,$
 过P作 $PF \parallel AB$,
 同理可得, $\angle APC = \angle BAP - \angle DCP,$
 $\therefore \angle BAP$ 与 $\angle DCP$ 的平分线相交于点K,
 $\therefore \angle AKC = \angle BAK - \angle DCK = \frac{1}{2}\angle BAP - \frac{1}{2}\angle DCP$
 $= \frac{1}{2}(\angle BAP - \angle DCP) = \frac{1}{2}\angle APC,$
 $\therefore \angle AKC = \frac{1}{2}\angle APC.$

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

练习9

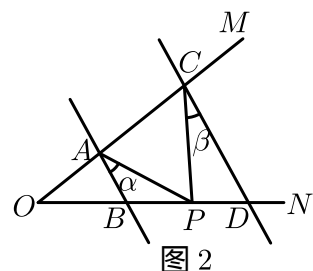
24. 问题情境：如图1, $AB \parallel CD$, $\angle PAB = 130^\circ$, $\angle PCD = 120^\circ$, 求 $\angle APC$ 的度数.

小明的思路是：过P作 $PE \parallel AB$, 通过平行线性质来求 $\angle APC$.

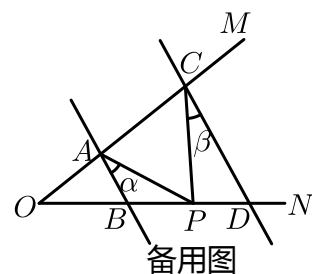


(1) 按小明的思路, 求 $\angle APC$ 的度数.

(2) 问题迁移: 如图2, $AB \parallel CD$ 点 P 在射线 OM 上运动, 记 $\angle PAB = \alpha$, $\angle PCD = \beta$, 当点 P 在 B 、 D 两点之间运动时, 问 $\angle APC$ 与 α 、 β 之间有何数量关系? 请说明理由.



(3) 问题应用: 在(2)的条件下, 如果点 P 在 B 、 D 两点外侧运动时(点 P 与点 O 、 B 、 D 三点不重合), 请直接写出 $\angle APC$ 与 α 、 β 之间的数量关系.

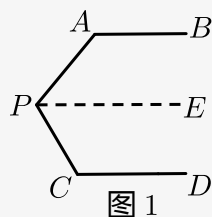


【答案】(1) 110° .

(2) $\angle APC = \alpha + \beta$.

(3) $\angle APC = \beta - \alpha$.

【解析】(1) 过点 P 作 $PE \parallel AB$,



$\because AB \parallel CD$,

$\therefore PE \parallel AB \parallel CD$,

$\therefore \angle PAB + \angle APE = \angle PCD + \angle CPE = 180^\circ$,

$\because \angle PAB = 130^\circ$, $\angle PCD = 120^\circ$,

$\therefore \angle APE = 50^\circ$, $\angle CPE = 60^\circ$,

$$\therefore \angle APC = \angle APE + \angle CPE = 110^\circ .$$

(2) 过点 P 作 $PE \parallel AB$ 交 AC 于点 E ,

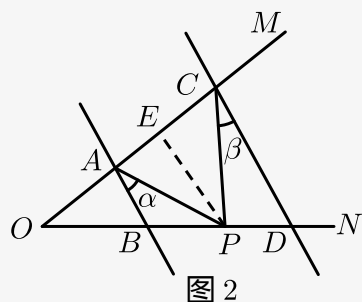


图 2

$$\because AB \parallel CD ,$$

$$\therefore AB \parallel PE \parallel CD ,$$

$$\therefore \alpha = \angle APE , \beta = \angle CPE ,$$

$$\therefore \angle APC = \angle APE + \angle CPE = \alpha + \beta .$$

(3) 当 P 在 BD 延长线上时, 过点 P 作 $PE \parallel AB$ 交 AC 于点 E ,

$$\because AB \parallel CD ,$$

$$\therefore AB \parallel PE \parallel CD ,$$

$$\therefore \alpha = \angle APE , \beta = \angle CPE ,$$

$$\therefore \angle APC = \angle APE - \angle CPE = \alpha - \beta ,$$

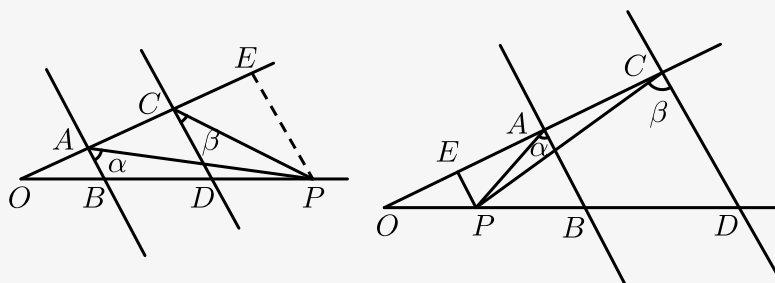
当 P 在 DB 延长线上时, 过点 P 作 $PE \parallel AB$ 交 AC 于点 E ,

$$\because AB \parallel CD ,$$

$$\therefore AB \parallel PE \parallel CD ,$$

$$\therefore \alpha = \angle APE , \beta = \angle CPE ,$$

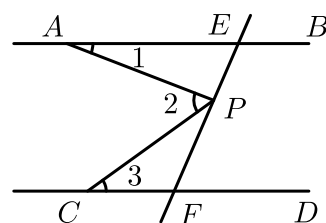
$$\therefore \angle APC = \angle CPE - \angle APE = \beta - \alpha .$$



【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型

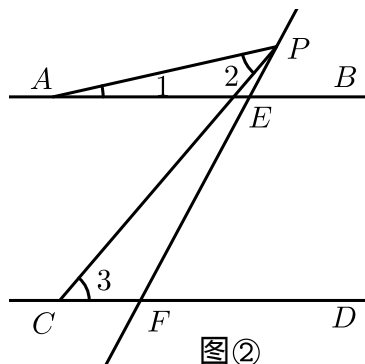
25. 已知直线 $AB \parallel CD$, 直线 EF 分别截 AB 、 CD 于点 E 、 F 两点 .

(1) 如图① , 有一动点 P 在线段 EF 之间运动 (不与 E 、 F 两点重合) , 试探究 $\angle 1$ 、 $\angle 2$ 、 $\angle 3$ 的等量关系? 试说明理由 .

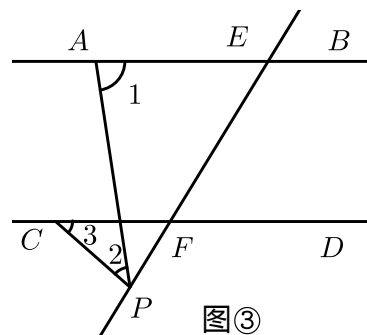


图①

(2) 如图②、③, 当动点 P 在线段 EF 之外运动(不与 E, F 两点重合), 问上述结论是否还成立? 若不成立, 试写出新的结论并说明理由.



图②



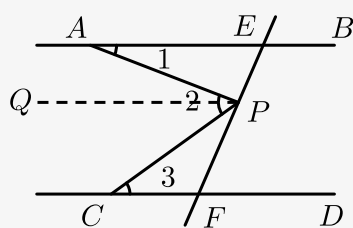
图③

【答案】 (1) $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$, 证明见解析.

(2) $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$ 不成立, 新的结论为 $\angle 2 = |\angle 1 - \angle 3|$. 证明见解析.

【解析】 (1) $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$, 理由如下:

如图④, 过点 P 作 $PQ \parallel AB$,



图④

则 $\angle 1 = \angle APQ$.

$\because AB \parallel CD, PQ \parallel AB$,

$\therefore PQ \parallel CD$,

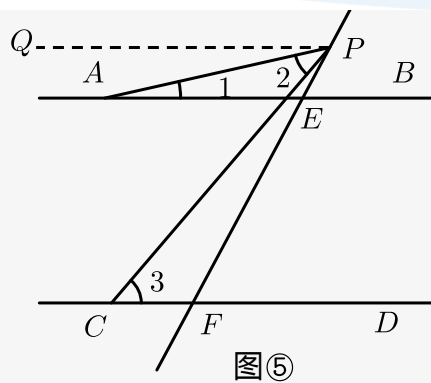
$\therefore \angle 3 = \angle CPQ$.

$\therefore \angle 2 = \angle APQ + \angle CPQ = \angle 1 + \angle 3$.

(2) $\angle 2 = \angle 1 + \angle 3$ 不成立, 新的结论为 $\angle 2 = |\angle 1 - \angle 3|$. 理由如下:

当点 P 在 FE 的延长线上时,

如图⑤, 过点 P 作 $PQ \parallel AB$,



则 $\angle 1 = \angle APQ$.

$\because AB \parallel CD, PQ \parallel AB$,

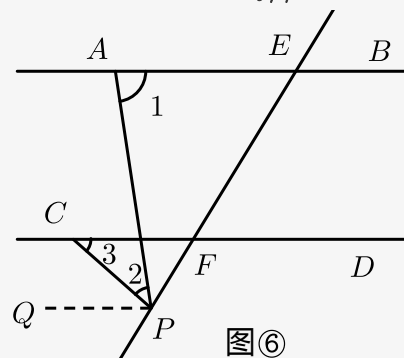
$\therefore PQ \parallel CD$,

$\therefore \angle 3 = \angle CPQ$.

$\therefore \angle 2 = \angle CPQ - \angle APQ = \angle 3 - \angle 1$;

当点 P 在 EF 的延长线上时 ,

如图⑥ , 过点 P 作 $PQ \parallel AB$,



则 $\angle 1 = \angle APQ$.

$\because AB \parallel CD, PQ \parallel AB$,

$\therefore PQ \parallel CD$,

$\therefore \angle 3 = \angle CPQ$,

$\therefore \angle 2 = \angle APQ - \angle CPQ = \angle 1 - \angle 3$.

综上所述 : $\angle 2 = |\angle 1 - \angle 3|$.

【标注】【知识点】平行线构造-拐点模型